Pythonで数学を

みんなのPython勉強会#86

辻真吾（@tsjshg）

お前誰よ？（自己紹介）

- 大学の研究所に勤めています
- バイオインフォマティクスとエネルギーシステム
  - 数理工学はなんでもあり
- 明日からPyConJP行きます
  - 土曜日お昼のスポンサーセッションで司会
- www.tsjshg.info

あらすじ

- 某カンファレンスで落選したネタ
  - 本の宣伝をしたいという真意がバレたか？
- 「Pythonで数学を」改め「高次元空間の不思議議」
- ゆっくり行くので気楽にお付き合いください

半径rの円の面積は？

$$\pi r^2$$

半径rの球の体積は？

$$\frac{4\pi r^3}{3}$$

（身の上に心配あーるの？by淀先生）

n次元へ一般化

原点からの距離がr以下の領域

n次元**超球**を考える

この体積は

$$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{r}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\boldsymbol{r}^n$$

いかつい・・・

標準のmathモジュールだけでコードにできる

```python
import math

def n_ball_vol(n, r):
    '''n次元空間において半径rの超球の体積を返す関数

    n: 次元の数
    r: 半径
    '''
    return pow(r, n) * pow(math.pi, n/2) / math.gamma(n/2 + 1)
```

半径1の円の面積はπ

```
math.isclose(n_ball_vol(2, 1), math.pi)
True
```

半径1の球の体積は$\frac{4}{3}\pi$

```
math.isclose(n_ball_vol(3, 1), 4*math.pi/3)
True
```

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$$

ちょっとだけガンマ関数$\Gamma(x)$について

ガンマ関数は階乗の一般化

正の整数nの階乗$n!$は

nから1まですべての整数の掛け算

例: $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

標準モジュールで計算できる

```
math.factorial(6)
720
```

ちなみに$0! = 1$

```
math.factorial(0)
1
```

$x > 0$のとき

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

また$\Gamma(1) = 1$なので、自然数nについては

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ためしてみよう

$$\Gamma(6) = (6-1)!$$

```
math.gamma(6) == math.factorial(6-1)
True
```

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

```
math.isclose(math.gamma(1/2), math.sqrt(math.pi))
True
```

3次元空間の半径1の球の体積

$$V_3(1) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})$$より

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

ちなみに、階乗といえば再帰

```
def my_factorial(n):
    if not isinstance(n, int):
        raise TypeError("引数は整数型でお願いします。")
    if n < 0:
        raise ValueError("引数は0以上でお願いします。")
    if n <= 1:
        return 1
    return n * my_factorial(n-1)
```

半径$r=1$の超球の体積

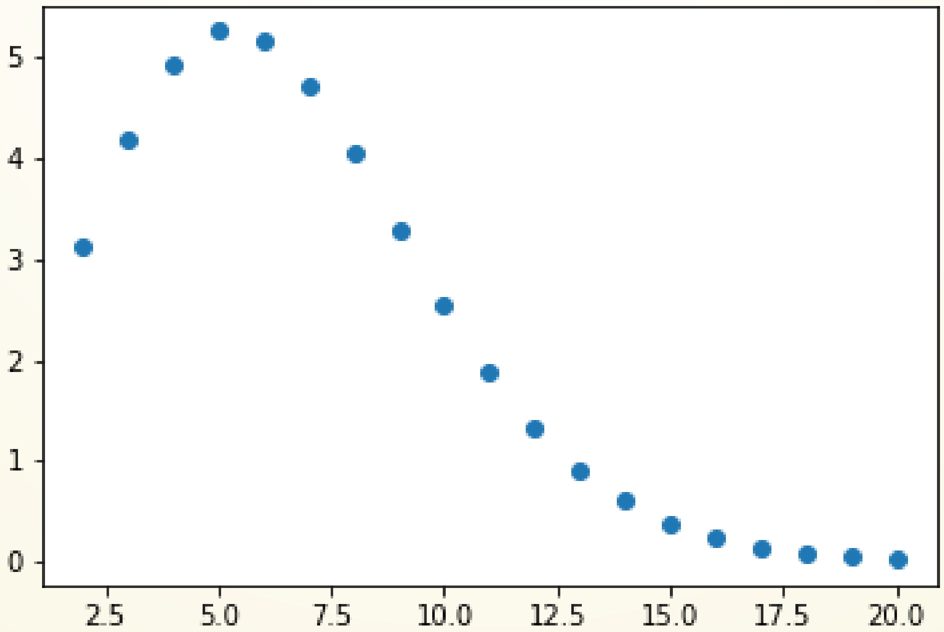
次元nが変わるとどうなるか？

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$$

式をみているだけでは、わからない・・・

計算してプロットすればいい

```python
import matplotlib.pyplot as plt
# 次元を2から20まで
dims = range(2, 21)
# 半径を1に固定して体積を計算
vols = [n_ball_vol(n, 1) for n in dims]
# プロット
plt.scatter(dims, vols)
```



5
4
3
2
1
0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

半径1の超球の体積は次元が上がると0に近付く

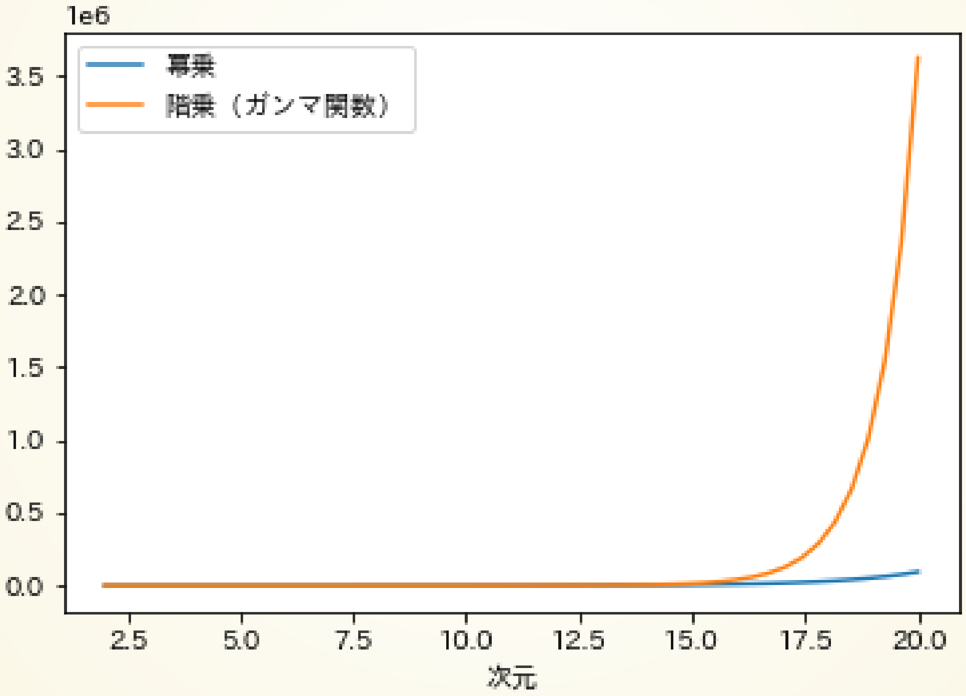
式を見るとわかる

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

分子（上）はだいたいπのn乗

分母（下）はだいたいnの階乗（ガンマ関数）

プロットすると増加率の違いがよくわかる



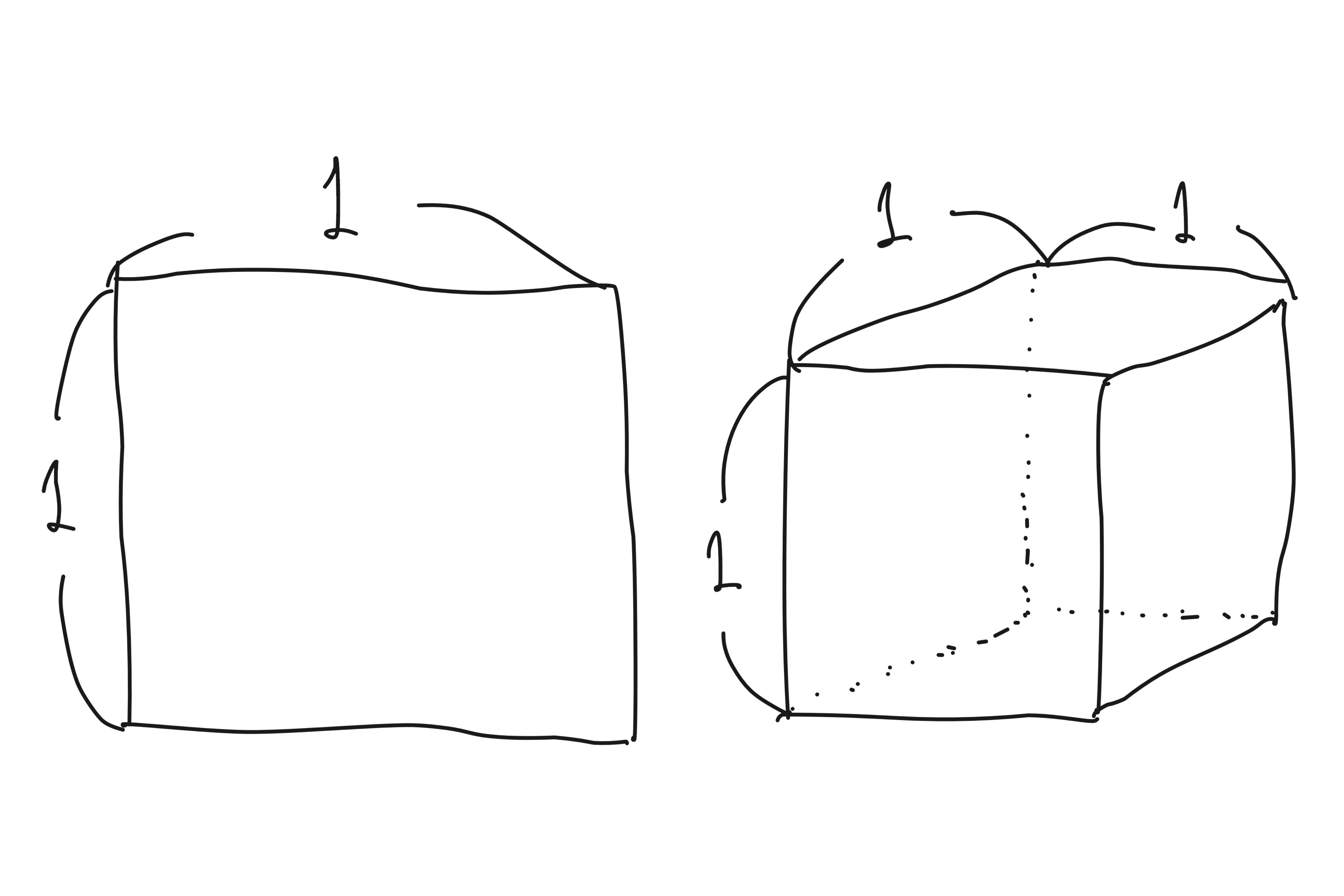
超立方体

1辺が1の正方形の面積は1

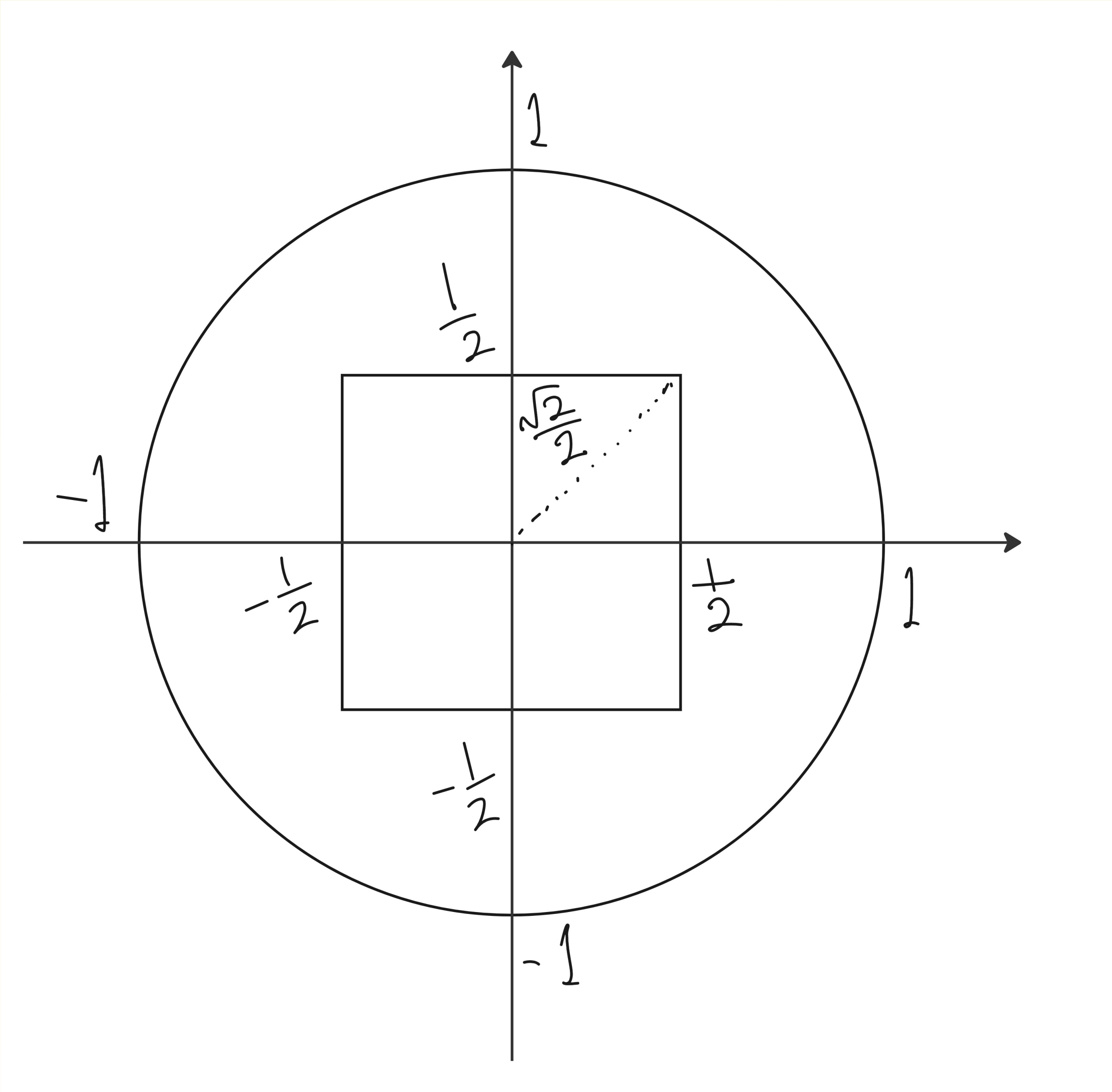
1辺が1の立方体の体積も1

1辺が1のn次元超立方体の体積はやっぱり1

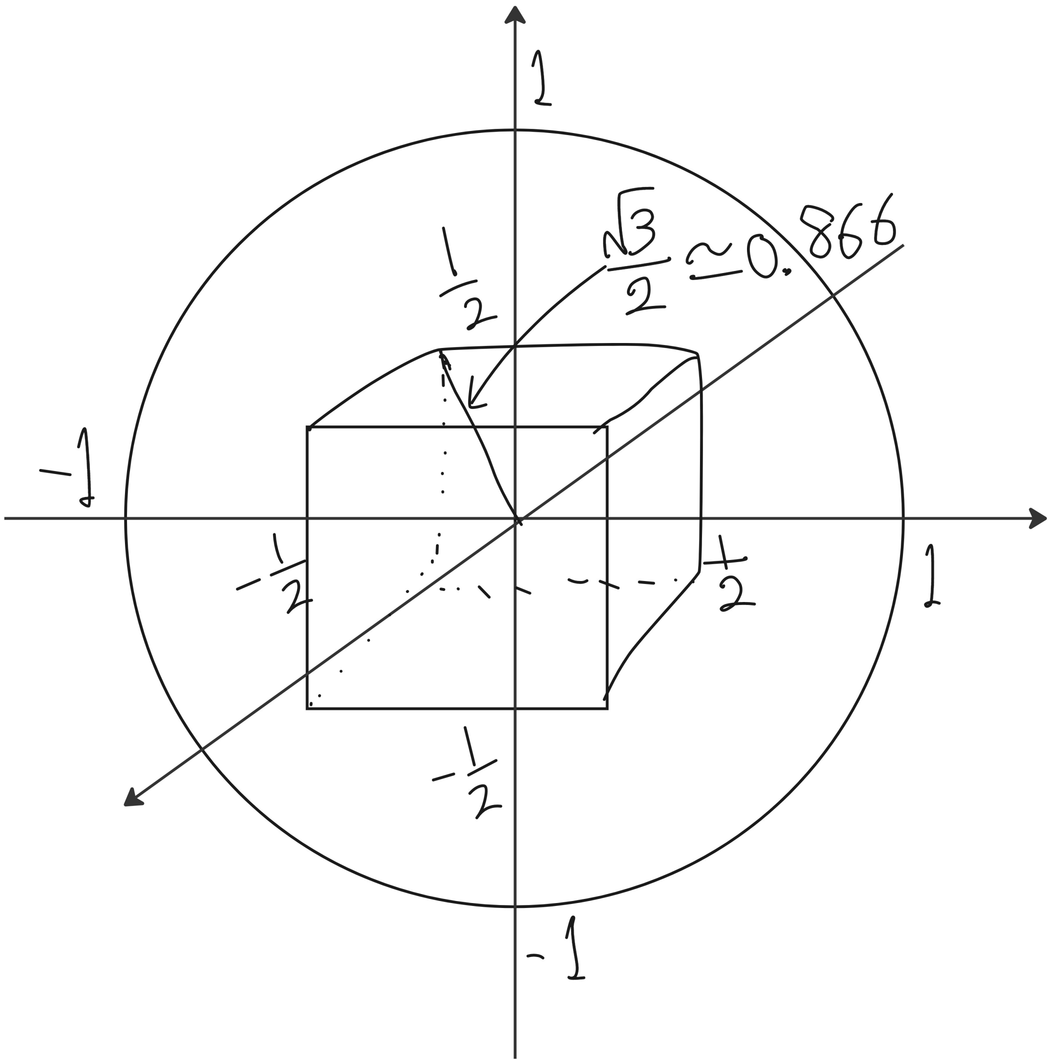
正方形と立方体



2次元では、円の内部に正方形がすっぽり収まる



3次元でも、球の内部に立方体がすっぽり収まる



1
-1
1
-1
1/2
-1/2
1/2
-1/2
√3/2 ≃ 0.866

超球と超立方体

1辺が1のn次元超立方体の対角線の長さは$\sqrt{n}$

4次元空間では$\sqrt{4} = 2$で半径が1の超球に内接

$\sqrt{5} > 2$なので、5次元で出る！

高次元空間は不思議がいっぱい

Pythonで数学を学びたくなってきた

あなたに送る2冊

谷合廣紀『Pythonで理解する統計解析の基礎』

井口和之『Pythonで理解する微分積分の基礎』

秘密裏に線形代数の企画が進行中です

最近読んだ数学関連で一押し

原岡喜重『はじめての解析学』

BLUE BACKS

はじめての解析学

微分、積分から量子力学まで

Haraoka Yoshishige
原岡喜重

まとめ

- 高次元空間は不思議がいっぱい
- Pythonのコードで数学を楽しく理解
- ほんとうは特異値分解の話をしたかった